

# Численное моделирование и расчет прочностных свойств стекла

Б.И. Краснопольский\*, А.Г. Чесноков†, С.А. Чесноков\*

Стекло является одним из самых распространенных архитектурных материалов, который широко применяется в качестве прозрачного заполнения световых проемов. Развитие архитектуры, накопленный объем знаний, совершенствование технологий породили качественный скачок в применении стекла во второй половине XX века. Новые покрытия и полимерные материалы промежуточных слоев, новые технологии производства больших листов стекла, моллированного и закаленного стекла привели к тому, что оно стало использоваться в качестве доминирующего материала для современных фасадов. Постепенно оно проникает в те области, где ранее его применение было сильно затруднено или даже невозможно: стеклянные крыши, лестницы, полностью стеклянные фасады без несущих металлических элементов, несущие конструкции.

Разумеется, без соответствующей научной и инженерной проработки и серьезных материальных затрат применение такого «неоднозначного» материала как стекло оставалось бы сильно ограниченным. Реализация преимуществ стекла как строительного материала одновременно со снижением влияния его недостатков является очень сложной архитектурно-технической проблемой. Это стало одной из причин того, что самые выдающиеся примеры неординарной архитектуры с нетрадиционным, оригинальным использованием стекла сосредоточены или спроектированы в развитых странах. Кроме того, стекло приносит в архитектуру особую эстетику, которая, к тому же, просто популярна на Западе, но не всегда принимается у нас. Однако в России современная архитектура тоже развивается, находя все новые художественные пути и формы. Конечно, в нашей стране имеется целый ряд особенностей, которые не позволяют заимствовать напрямую технические решения с Запада: резко континентальный климат, например. Тем не менее, при соответствующих усилиях в России возможна не менее эффективная и эффектная архитектура с использованием стекла.

Целью работы, проводимой совместно «Институтом стекла» и Московским инженерно-физическим институтом, является моделирование поведения стеклянных конструкций, в первую очередь стеклопакетов, в зданиях. Такую задачу приходится решать последовательно, переходя от более простых к более сложным и комплексным случаям. Поскольку моделирование является неотъемлемым этапом как проектирования новых конструкций, так и экспертизы существующих, успешное создание прикладного пакета программ позволит, как мы надеемся, существенно повлиять на принципы применения стекла в нашей архитектуре. При этом одновременно будут учтены и вопросы безопасности и комфорта, а также другие задачи современной архитектуры.

## ***Традиционный метод расчета прочностных характеристик остекления***

Уже достаточно долгое время известен проект европейского стандарта prEN 13474 [1, 2]. В нем изложены принципы простого с технической точки зрения расчета напряжений и прогибов, возникающих в многослойном и/или однокамерном остеклении. Это позволяет сравнивать варианты остекления между собой, выбирать остекление, которое заведомо выдержит предполагаемые для конкретного проекта нагрузки.

К достоинствам методики prEN 13474 можно отнести:

---

\* Кафедра «Прикладная математика», МИФИ(ГУ)

† Отдел стандартизации и испытаний, ОАО «Институт стекла»

- простоту – расчет можно провести даже без использования компьютера, хотя это и займет какое-то время,
- многолетний опыт применения,
- достаточную точность для сравнения вариантов остекления между собой,
- учет нагрузок, возникающих в стеклопакете при существенном изменении температуры воздуха и давления.

Авторы хорошо изучили данный метод и активно используют его на практике [5, 6, 7]. Еще на этапе разработки указанного проекта стандарта в «Институте стекла» была разработана коррелирующая с ним методика расчета механических характеристик вариантов остекления.

Таким образом, казалось бы, проблема уже решена. Однако это не так, что, кстати, подтверждается многолетней задержкой в принятии указанного стандарта.

Дело, как нам кажется, в том, что недостатки методики prEN 13474 также весьма серьезны. Причем в условиях России их можно разделить на две категории: общие со странами Европы и связанные с особенностями нашей страны (в частности, ее климата, конечно). Итак, основные недостатки методики prEN 13474:

- Методика не рассматривает такого ставшего широко распространенным метода крепления остекления, как «точечное» или «спайдерное». Практически, ее удобно применять только для прямоугольных листов стекла и стеклопакетов, закрепленных по 4, 3 или 2 (противолежащим) сторонам.
- Хотя в стандарте и декларируется расчет для различных видов нагрузки, реально он работает только для равномерно распределенной нагрузки, что не соответствует современным требованиям проектирующих организаций.
- Подробно рассмотрен расчет только однокамерных стеклопакетов, хотя методику и можно доработать и обобщить на большее число камер.
- В качестве результата расчета можно получить только величины «максимального прогиба», максимального и эффективного напряжения в стеклах, но не картину распределения этих величин.
- Методика никак не связана с тепловыми и оптическими характеристиками рассматриваемого остекления. Это обстоятельство не проявляет себя до определенного момента, но на практике в суровых условиях неоднократно наблюдались явления, которые методикой не предсказываются.

Так как на практике авторам встречались самые разнообразные проекты остекления, еще в конце 1990-х годов стало ясно, что необходимо разрабатывать независимую оригинальную методику расчета и расчетные программы, которые опирались бы на решение как можно более полной системы соотношений, описывающих остекление, с учетом всех возможных факторов. Для специалистов в области численного моделирования понятно, что такая постановка вопроса является чересчур общей, но мы последовательно ее конкретизировали и сейчас уже можно сказать, что в решении этой задачи добились реальных результатов.

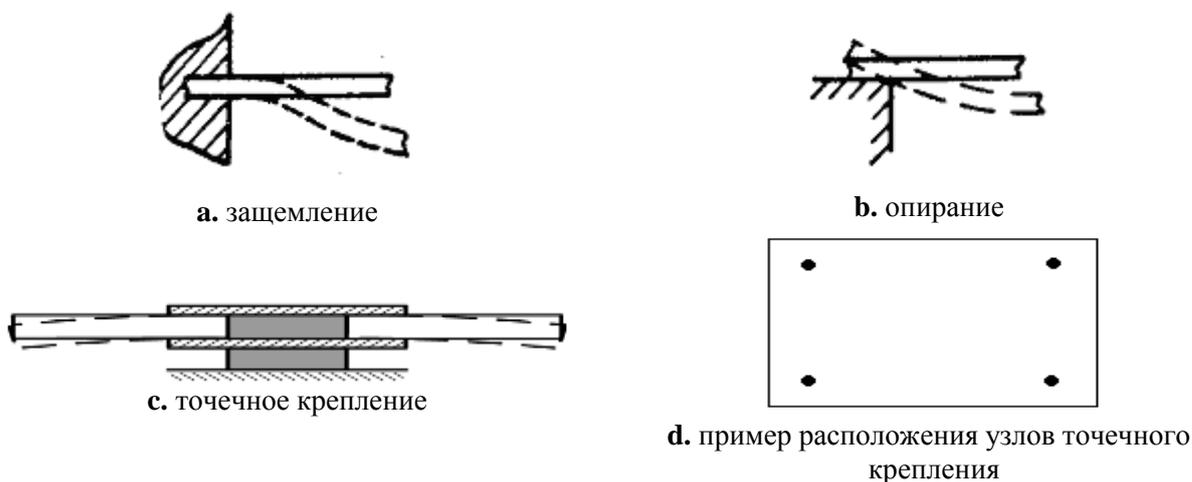
### ***Постановка задачи о прогибе и напряжении в стеклах***

Создание расчетных методов и программ необходимо начать с математической формулировки задачи, которую они должны решать. Иначе говоря – задачу надо «поставить». Как следует из теории сопротивления материалов, в общем случае, изгиб пластины конечной жесткости при наличии цепных усилий описывается полной системой дифференциальных уравнений Кармана. В некотором приближении, когда прогиб пластины сравним с ее толщиной, эта система сводится к бигармоническому уравнению:

$$\Delta^2 u = \frac{1}{D} q(x, y),$$

где в данных обозначениях  $U$  - прогиб пластины,  $q(x, y)$  - внешняя нагрузка,  $D$  - цилиндрическая жесткость.

Уравнения дополняются соответствующими граничными условиями, зависящими от формы области решения и различных способов закрепления по периметру. Наиболее часто встречающиеся способы закрепления, которые были рассмотрены: защемление (рис. 1-а), опирание (рис. 1-б), называемое также шарнирным закреплением, точечное крепление (рис. 1-с, 1-d), а также свободный, то есть незакрепленный, край.



**Рисунок 1.** Различные виды закрепления листов стекла.

Напряжения в пластинах описываются симметричным тензором напряжений, компоненты которого выражаются через вторые и третьи пространственные производные от величины прогиба пластины. Конкретные формулы ввиду своей громоздкости не приводятся.

Понятно, что точное решение «реальной» задачи в приведенном случае невозможно, так как граничные условия или условия на контуре просто не выражаются в аналитической форме. Поэтому, как это обычно бывает при решении практических задач, пришлось использовать приближенные методы решения.

Отступая немного в сторону от темы статьи можно сказать, что приближенные методы решения задач могут быть разбиты на две основные группы:

1. Вариационные методы, которые дают приближенные аналитические выражения искомой функции (функции перемещений или функции внутренних усилий).
2. Численные методы, которые дают значения искомой функции при тех или иных значениях аргумента.

К первой группе относятся вариационные методы Ритца, Бубнова-Галеркина, метод Треффца и другие.

Ко второй группе относятся метод сеток и его более совершенная модификация – метод конечных элементов, а также ряд графических и полуграфических методов таких, как, например, метод прямых, метод коллокаций и другие.

Преимущество вариационных методов заключается в том, что задача сводится обычно к решению системы двух, трех, редко четырех уравнений, которые дают хорошее приближение к действительному состоянию сооружения. К их недостаткам следует отнести то, что возможности вариационных методов ограничены сложными контурами и сложными законами распределения внешней нагрузки, так как применение вариационных методов требует, чтобы, хотя бы в приближенной форме, было определено аналитическое выражение внешней нагрузки, деформированной упругой поверхности элемента и других условий задачи.

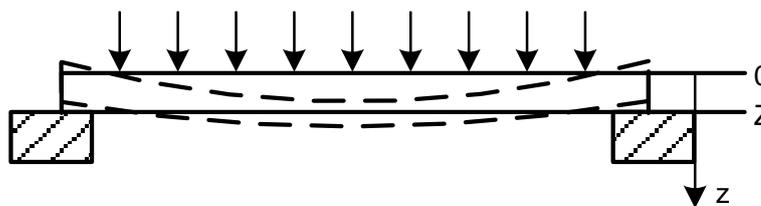
Численные методы, в сравнении с вариационными, имеют более универсальный характер, так как не требуют аналитических выражений условий задачи. Однако численные методы обладают и рядом недостатков. В частности, для получения удовлетворительной точности решения может потребоваться нанесение на исследуемую область довольно густой сетки или разбиения на большое число элементов, что влечет рост размерности матриц систем линейных алгебраических уравнений, разрешение которых становится возможным только при наличии достаточно мощной ЭВМ. Кроме того, численные методы на грубых сетках могут приводить к неточности решений в местах приложения сосредоточенных сил, при наличии острых углов, подкреплений и т.д., то есть там, где нарушается гладкость полей переменных.

Таким образом, выбор метода расчета при рассмотрении конкретной упругой системы зависит от постановки задачи и исходных условий, а также от вооруженности расчетчика вычислительной техникой. В рассматриваемом случае, то есть для моделирования остекления, авторами были выбраны сеточные методы.

Следует отметить, что рассматриваемая задача получилась чрезвычайно требовательной к объему памяти и мощности вычислительных средств. Кроме того, некоторые из вариантов задачи могут содержать систему с так называемой «плохо обусловленной» матрицей. Только серьезными усилиями по оптимизации расходования памяти и регуляризации (описание которых выходит за рамки данной статьи) удалось добиться успешной работы программного комплекса на обычных персональных компьютерах. И вместе с тем время расчета все равно может измеряться часами. Разумеется, оно зависит от мощности рабочей станции, но речь идет о наиболее мощных из доступных в настоящее время. Однако прогресс вычислительной техники дает основания надеяться, что эта проблема уже не будет такой острой даже в ближайшем будущем.

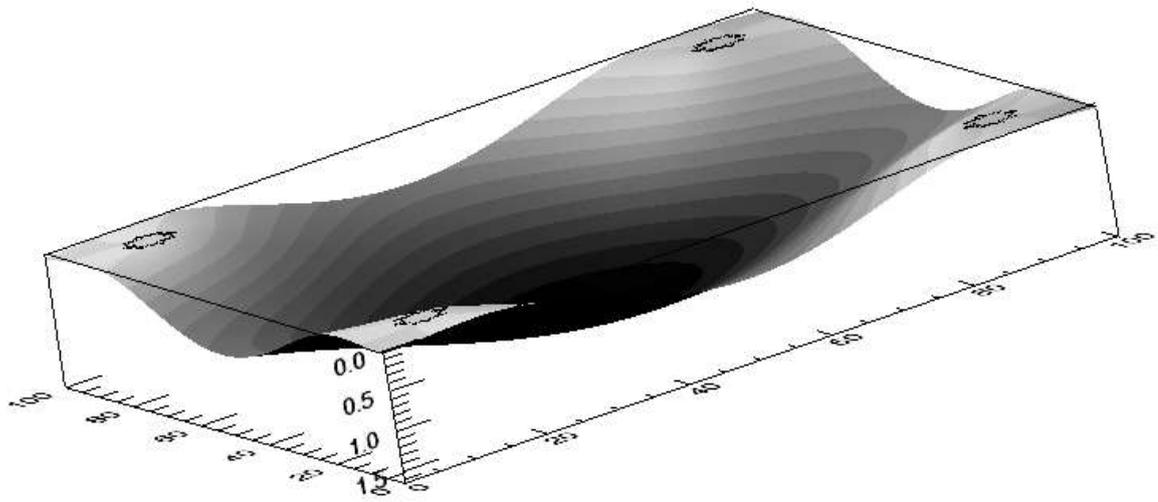
## **Результаты расчетов**

В качестве иллюстрации приведены несколько графиков, полученных при расчетах для стеклянных пластин и стеклопакетов с различными способами закрепления. Следует оговориться, что приведенные графики получены при пробных расчетах и эти значения величин не могут считаться абсолютно достоверными.

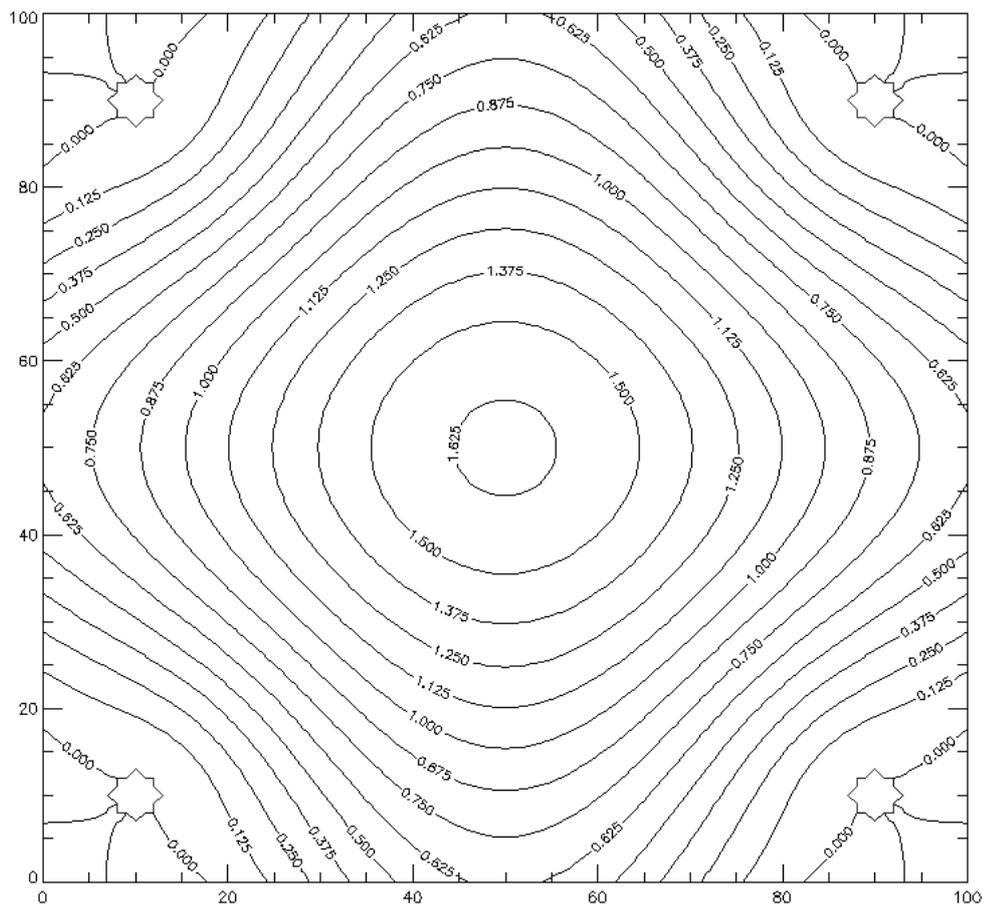


**Рисунок 2.** Схема приложения нагрузки на стеклопакет.

Все результаты представлены для пластин размера 1000x1000 мм; толщина стекол 6 мм; зазор между стеклами 16 мм (для пакетов); нагрузка равномерно-распределенная, 800 Н/м<sup>2</sup>.



**Рисунок 3.** Прогиб пластины при 4-точечном закреплении.



**Рисунок 4.** Прогиб пластины при 4-точечном закреплении. Линии уровня.

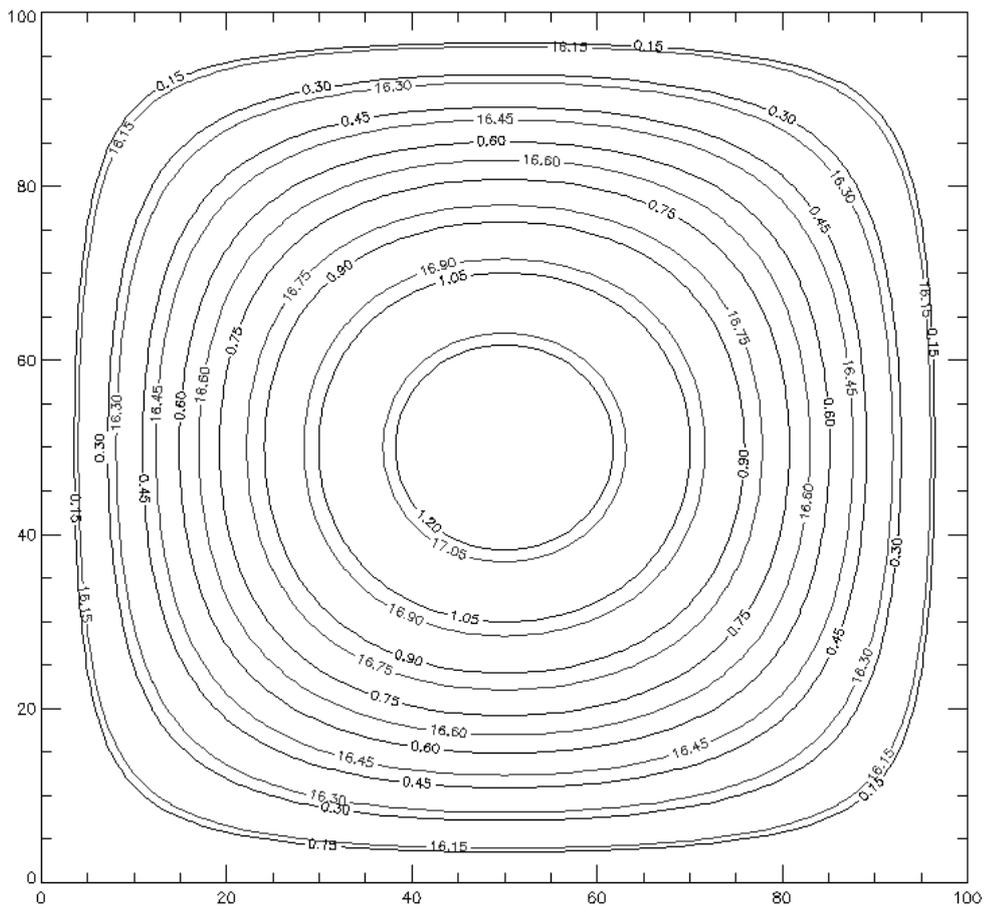


Рисунок 5. Прогиб однокамерного стеклопакета при опирании. Линии уровня.

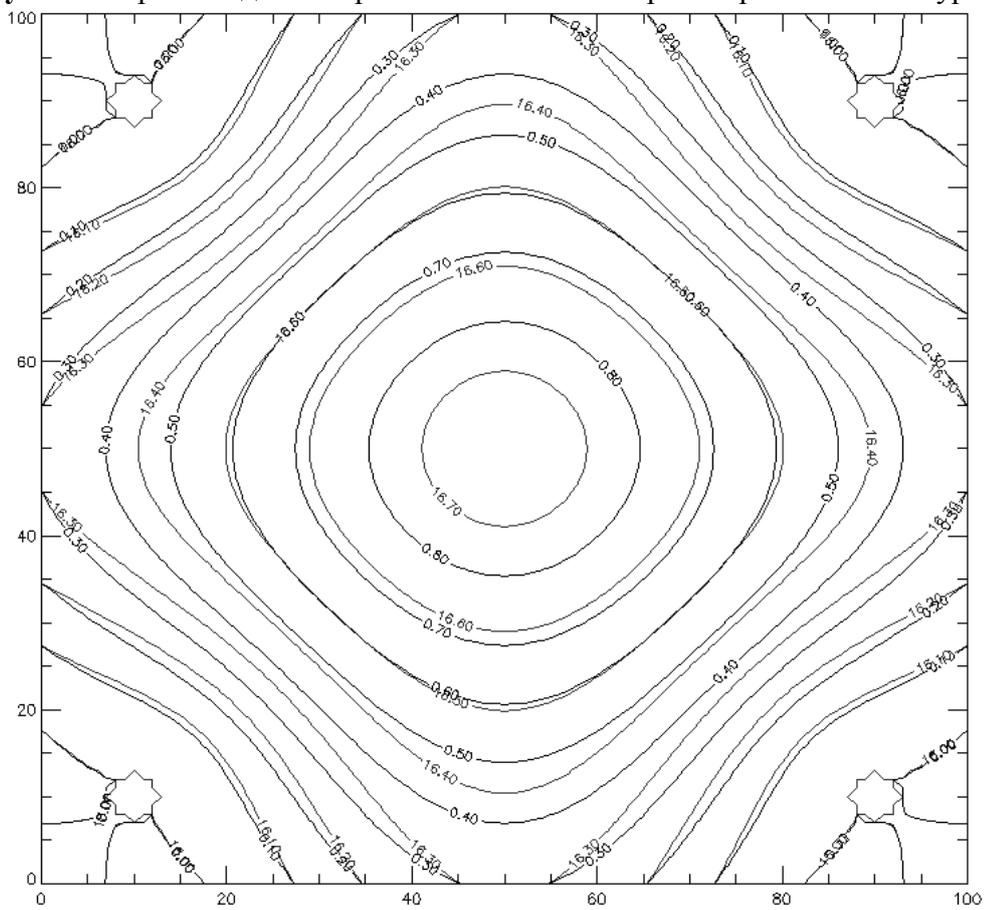


Рисунок 6. Прогиб однокамерного стеклопакета при 4-точечном закреплении. Линии уровня.

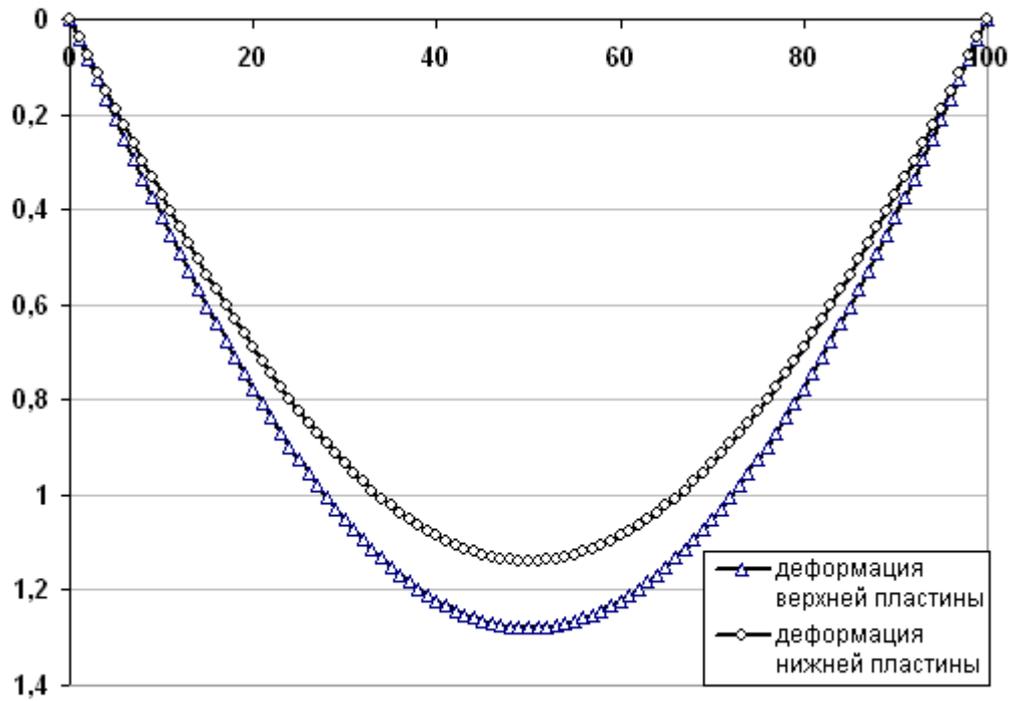


Рисунок 7. Прогиб в середине каждой пластины однокамерного стеклопакета. Случай опирания.

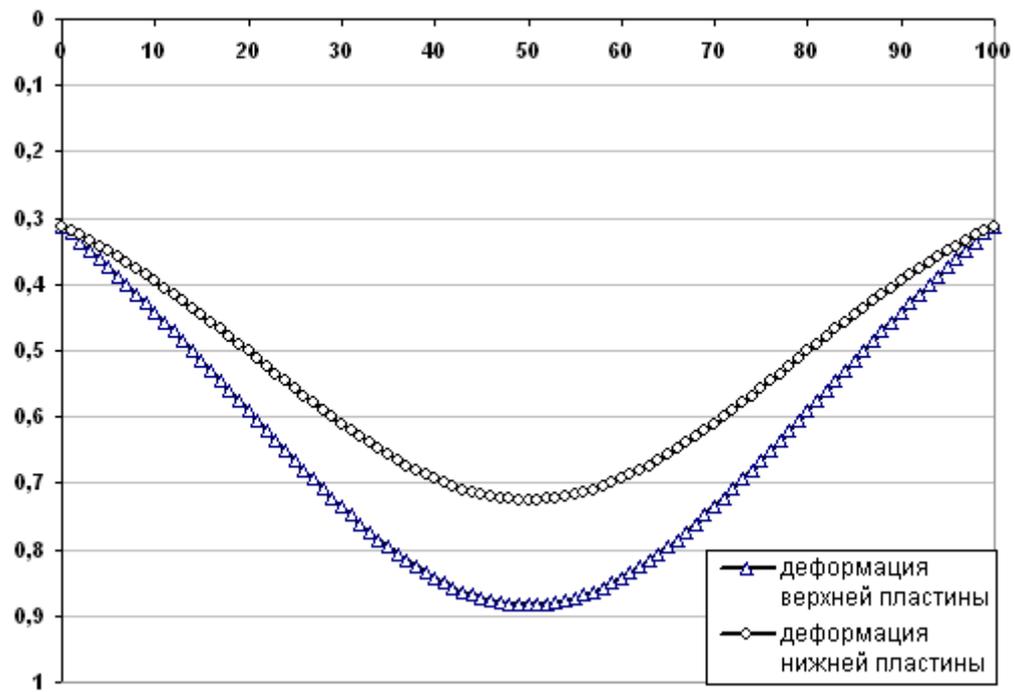


Рисунок 8. Прогиб в середине каждой пластины однокамерного стеклопакета. Случай 4-точечного закрепления.

В заключение следует сказать, что в настоящее время ведется работа по расширению рассмотренной модели и включению в нее так называемых «внутренних нагрузок в стеклопакете», которые напрямую связаны с тепловыми и оптическими параметрами стеклопакетов в климатических условиях России.

Чтобы понять суть протекающих процессов надо вспомнить, что тепло в стеклопакете переносится за счет трех различных физических процессов: теплопередачи, излучения и конвекции. Первый механизм легко «победить», то есть понизить теплопередачу, увеличивая толщину стекол и расстояние между ними, со вторым борются всевозможные энергосберегающие покрытия. Остается конвекция – наиболее сложный для моделирования процесс. Причем зависимость интенсивности переноса тепла за счет конвекции от расстояния между стеклами оказывается обратной теплопроводности – при увеличении зазора между пластинами вклад конвективных течений в картину тепловых полей в пакете заметно растет.

При понижении температуры в камере стеклопакета уменьшается давление внутри пакета, что приводит к деформации стекол и их прогибу навстречу друг другу. Данный механический эффект, в свою очередь, может существенно изменить тепловую картину в камере – меняется картина конвективных течений газа. При серьезном охлаждении на практике наблюдается «промерзание» центральной части стеклопакета. Чтобы получить такие эффекты в модели, необходимо ее дополнение расчетом течений газа в камере стеклопакета. Эта работа близка к завершению, и есть основания считать, что правильным является именно совместное моделирование тепловых и прочностных свойств остекления, так как в условиях России они сильно влияют друг на друга.

## **Литература**

1. Проект prEN 13474-1 "Стекло в строительстве - Расчет оконных стекол - Часть 1: Общее обоснование расчета";
2. Проект prEN 13474-2 "Стекло в строительстве - Расчет оконных стекол - Часть 2: Расчет однородно распределенных нагрузок";
3. Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем. ОГИЗ, М.- Л.: 1946 г.
4. Тьюарсон Р. Разреженные матрицы. Москва, Мир, 1977 г.
5. Chesnokov A.G., Tchesnokov S.A. Mathematical Modelling of IGU's Operational Parameters // In: "Glass Processing Days. Conference Proceedings 18 to 21 June 2001", Tampere, Finland, p. 657-659
6. Чесноков А.Г., Чесноков С.А. Математическое моделирование эксплуатационных параметров стеклопакетов. Светопрозрачные конструкции, № 4, 2001, с. 52 – 53
7. Chesnokov A.G., Tchesnokov S.A. Mathematical methods of glazing designing// Glass Processing Days 2003. Conference Proceedings. Poster 35.