

Сравнение схем расчета прогиба листа стекла с экспериментальными данными

Б.И. Краснопольский, С.А. Чесноков
*Московский инженерно-физический
институт (государственный
университет)*

Стекло в современной архитектуре



Стелянный пол смотровой площадки Останкинской телебашни



Стелянный купол над Hippo House (Берлинский зоопарк)



Постановка задачи о статическом прогибе пластины

Система дифференциальных уравнений в частных производных Кармана:

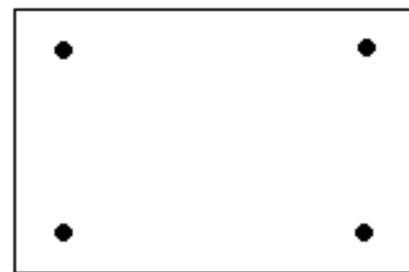
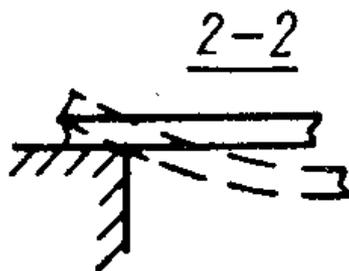
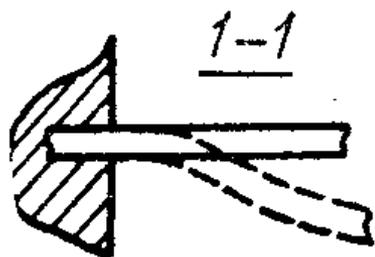
$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 \varphi &= E \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \\ \nabla^2 \nabla^2 w &= \frac{1}{D} \left\{ q(x, y) + h \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \right\} \end{aligned} \right\}$$

В случае малых прогибов ($w \sim h/2$) первое уравнение системы отпадает, а второе принимает вид

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = q$$

Постановка задачи, граничные условия

В условиях данной задачи в качестве области решения рассматривалась прямоугольная пластина. Рассматривались различные способы закрепления по периметру: защемление (1-1), опирание (2-2) и свободный край с точечным креплением.



Постановка задачи, граничные условия (заземление)

для заземления:

$$\left. \begin{aligned} w|_{\tilde{A}} &= 0 \\ \frac{\partial w}{\partial n}|_{\tilde{A}} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Постановка задачи, граничные условия (опирание)

в случае опирания:

$$\left. \begin{aligned} w|_{\tilde{A}} &= 0 \\ M_x|_{x=0; x=a} &= D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \\ M_y|_{y=0; y=b} &= D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0 \end{aligned} \right\}$$

что в данном случае
эквивалентно условию:

$$\left. \begin{aligned} w|_{\Gamma} &= 0; \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=0; x=a} &= 0; \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Big|_{y=0; y=b} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Постановка задачи, граничные условия (незакрепленный край)

$$\left. \begin{aligned} M_x \Big|_{x=0; x=a} &= D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \\ M_y \Big|_{y=0; y=b} &= D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0 \\ Q_x^0 \Big|_{x=0, x=a} &= Q_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) = 0 \\ Q_y^0 \Big|_{y=0, y=b} &= Q_y - \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} = D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right) = 0 \end{aligned} \right\}$$

Тензор напряжений

$$\sigma_x = -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right),$$

$$\sigma_y = -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$

$$\sigma_z = \frac{E}{24(1-\mu^2)} (h^3 - 3h^2z + 4z^3) \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{Ez}{1+\mu} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$\tau_{xz} = -\frac{E}{2(1-\mu^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right)$$

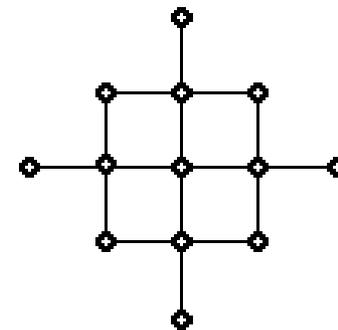
$$\tau_{yz} = -\frac{E}{2(1-\mu^2)} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right)$$

$$T_\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

Методика решения, случай заземления

Задача для заземления решается на 13-точечном шаблоне:

$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$	0	...	$a_{1,n-1}$	$a_{1,n}$	$a_{1,n+1}$	0	...	$a_{1,2n}$	0	...
$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$	$a_{2,4}$	0	...	$a_{2,n}$	$a_{2,n+1}$	$a_{2,n+2}$	0	...	$a_{2,2n+1}$	0
$a_{3,1}$	$a_{3,2}$	$a_{3,3}$	$a_{3,5}$	$a_{3,6}$	0	...	$a_{3,n+1}$	$a_{3,n+2}$	$a_{3,n+3}$	0	...	$a_{3,2n+2}$
0	$a_{1,1}$	$a_{1,1}$	$a_{1,1}$	$a_{1,1}$	$a_{1,1}$	0	...	$a_{4,n+2}$	$a_{4,n+3}$	$a_{4,n+4}$	0	...
...
$a_{n-1,1}$	0	...										
$a_{n,1}$	$a_{n,2}$	0	...									
$a_{n+1,1}$	$a_{n+1,2}$	$a_{n+1,3}$	0	...								
0	$a_{n+2,2}$	$a_{n+2,3}$	$a_{n+2,4}$	0	...							
...
$a_{2n,1}$	0	...	$a_{1,1}$	$a_{1,1}$	$a_{1,1}$	0	...					
0	$a_{2n+1,2}$	0	...	$a_{1,1}$	$a_{1,1}$	$a_{1,1}$	0	...				
...	0	$a_{2n+2,3}$	0

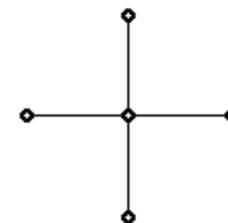


Структура матрицы
имеет вид:

Методика решения, случай опирания

Сведение одного дифференциального уравнения 4-го порядка к системе 2-х дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\left. \begin{array}{l} \nabla^2 v = q \\ \nabla^2 w = v \\ w|_{\Gamma} = 0 \\ v|_{\Gamma} = 0 \end{array} \right\}, \text{ где } v \text{ – некоторая фиктивная сила.}$$



$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	0	...	$a_{1,n}$	0	...
$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$	0	...	$a_{2,n+1}$	0
0	$a_{3,2}$	$a_{3,3}$	$a_{3,4}$	0	...	$a_{3,n+2}$
...
$a_{n,1}$	0	...				
0	$a_{n+1,2}$	0	...			
...	0	$a_{n+2,3}$	0	...		

Каждое из уравнений решается на 5-точечном шаблоне. В этом случае матрица СЛАУ будет иметь более простую структуру:

Методика решения, случай незакрепленного края

В случае свободных границ также применялся метод Зейделя на 13-точечном шаблоне. Также здесь представлен расчет прогиба герметичного стеклопакета.

Данный случай реализован с помощью LU-разложения, когда исходная матрица представляется в виде произведения 2 матриц специального вида:

$$A = L * U = \begin{array}{c|c} \begin{array}{cccc} l_{11} & 0 & \dots & \dots \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} & \begin{array}{cccc} 1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & 1 & u_{23} & u_{24} \\ \dots & 0 & 1 & u_{34} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \end{array}$$

откуда уже легко находятся и сами неизвестные.

Результаты расчетов

Результаты приведены для пластин размером 1000x1000 мм и толщиной 4 мм. Пластины равномерно нагружены силой, эквивалентной 2 собственным весам пластин ($p = 0,1962 \cdot 10^{-3} \text{ Н/мм}^2$). Значения констант, принятых в расчете:

Модуль Юнга: $E = 7 \cdot 10^4 \text{ Н/мм}^2$

Константа Пуассона: $\mu = 0,25$

Атмосферное давление $p_0 = 0,1013 \text{ Н/мм}^2$



График 1. Прогиб пластины при заземлении кромок.

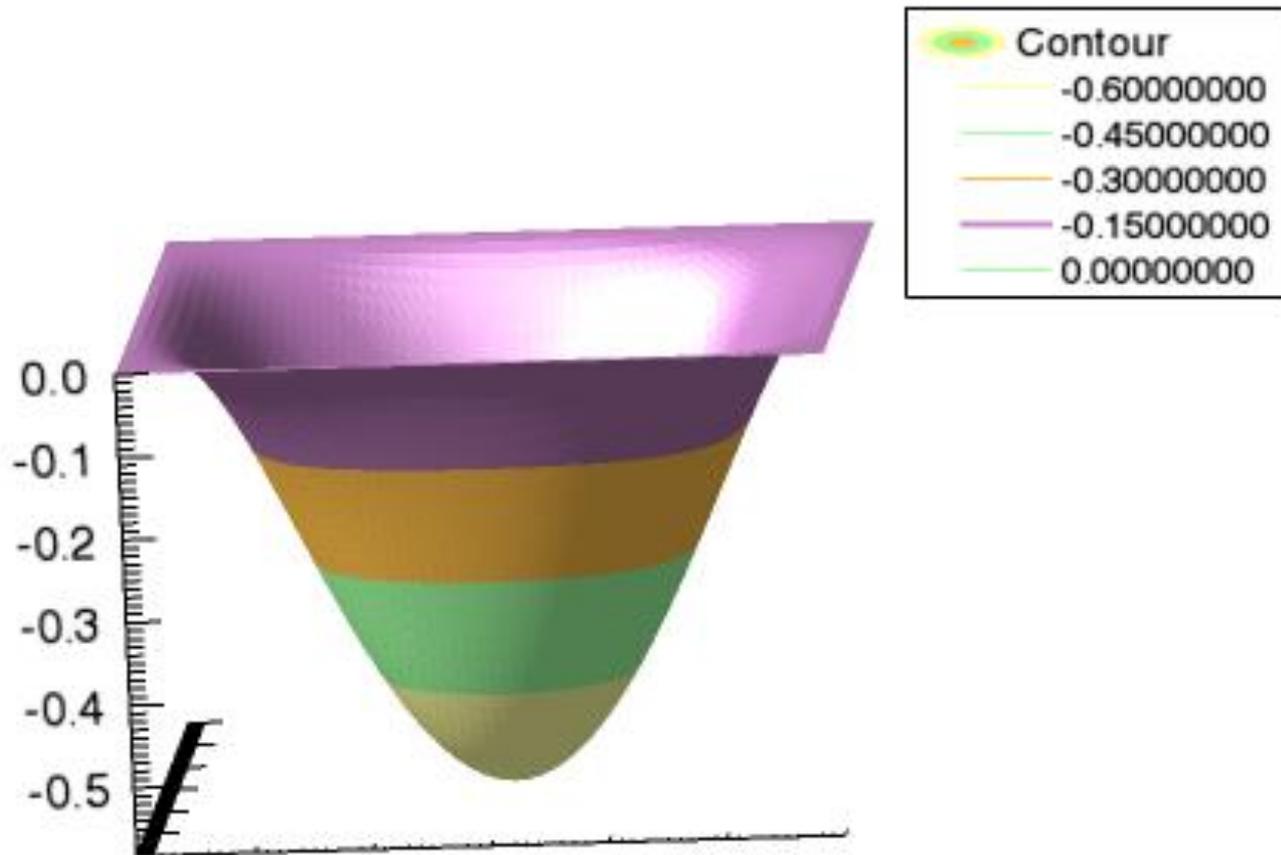


График 2. Прогиб пластины при опирании кромок.

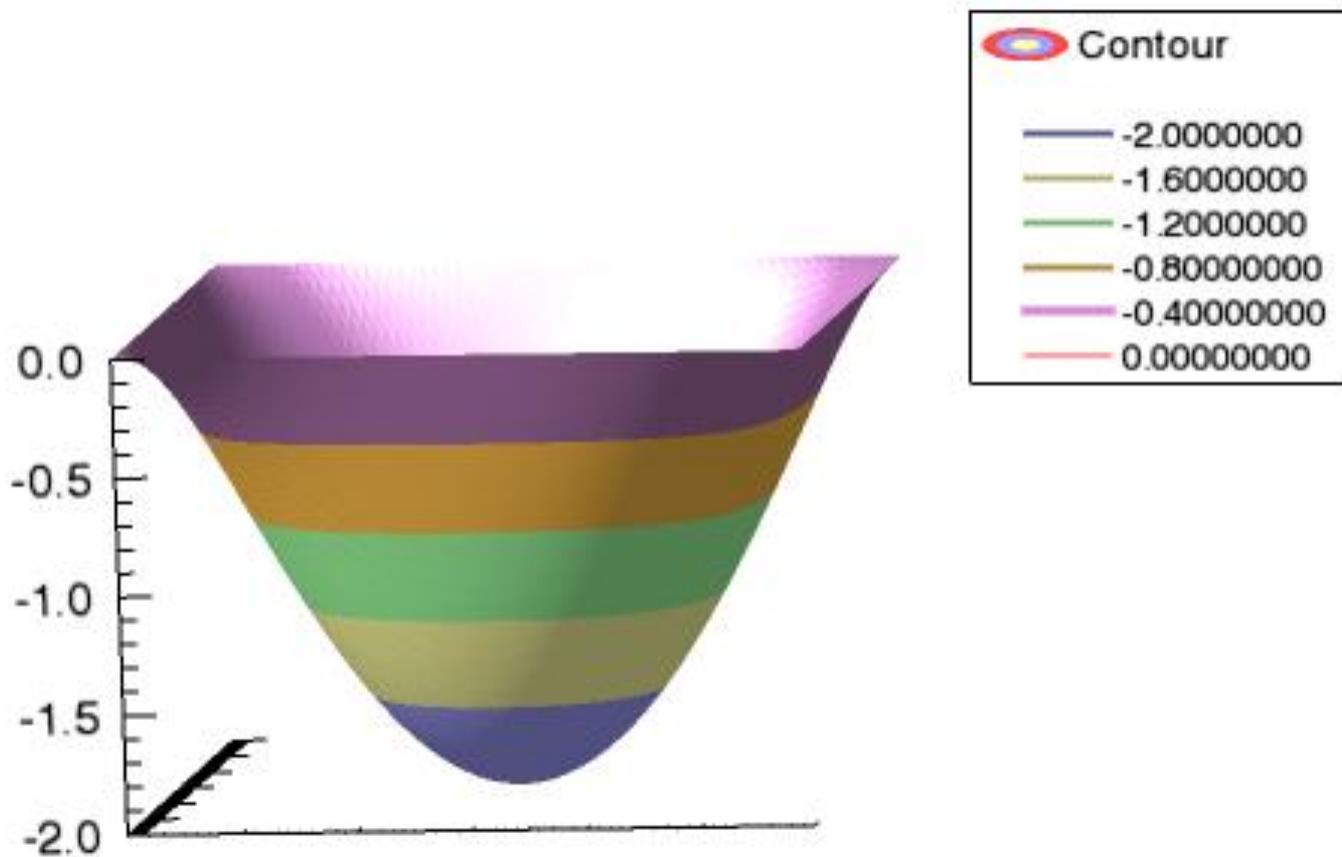
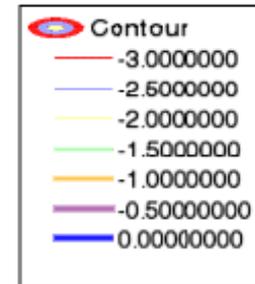
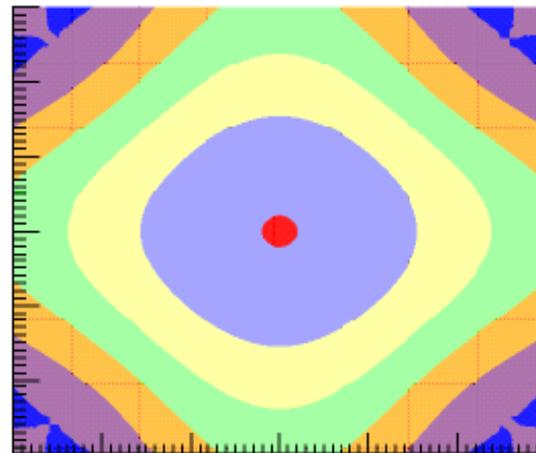
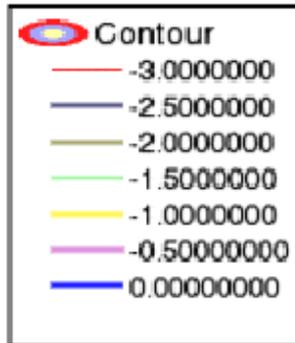
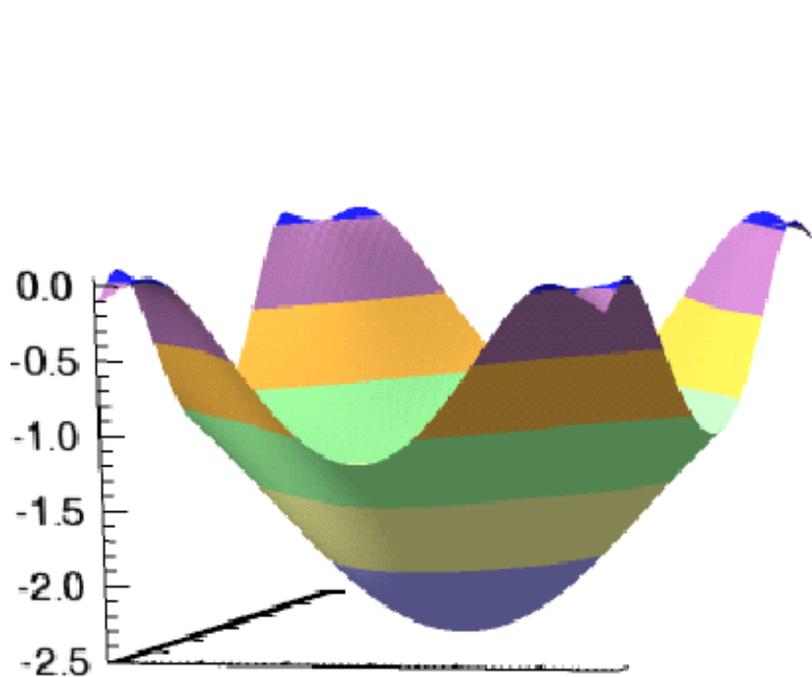


График 3-4. Прогиб пластины при 4-точечном креплении.



Графики 5-7. Прогиб стеклопакета.

При нагрузке $p=0.588 \cdot 10^{-3} \text{ Н/мм}^2$

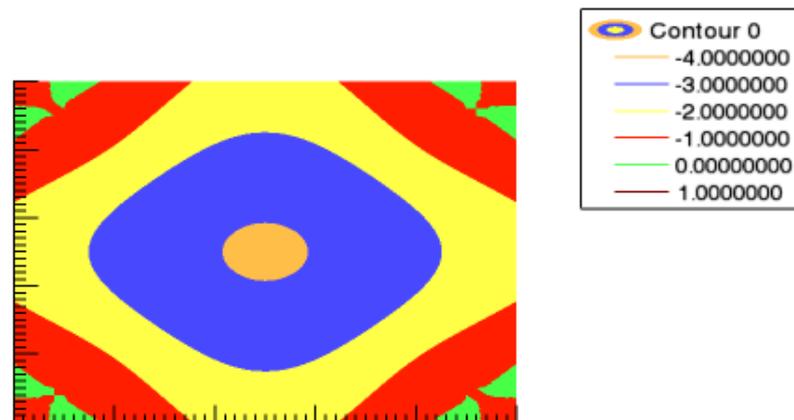
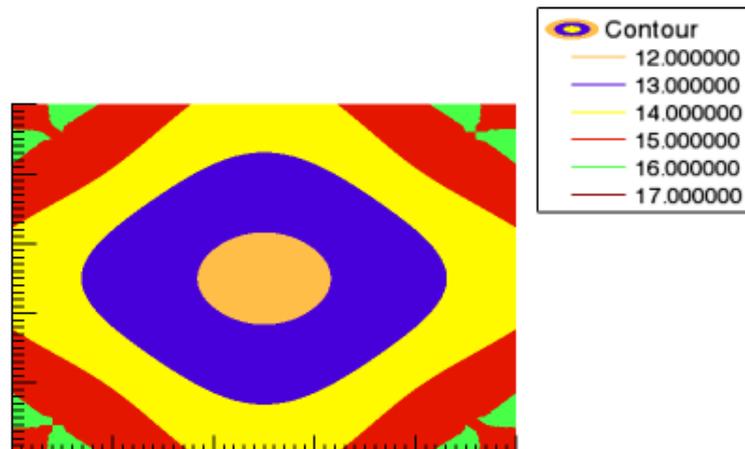
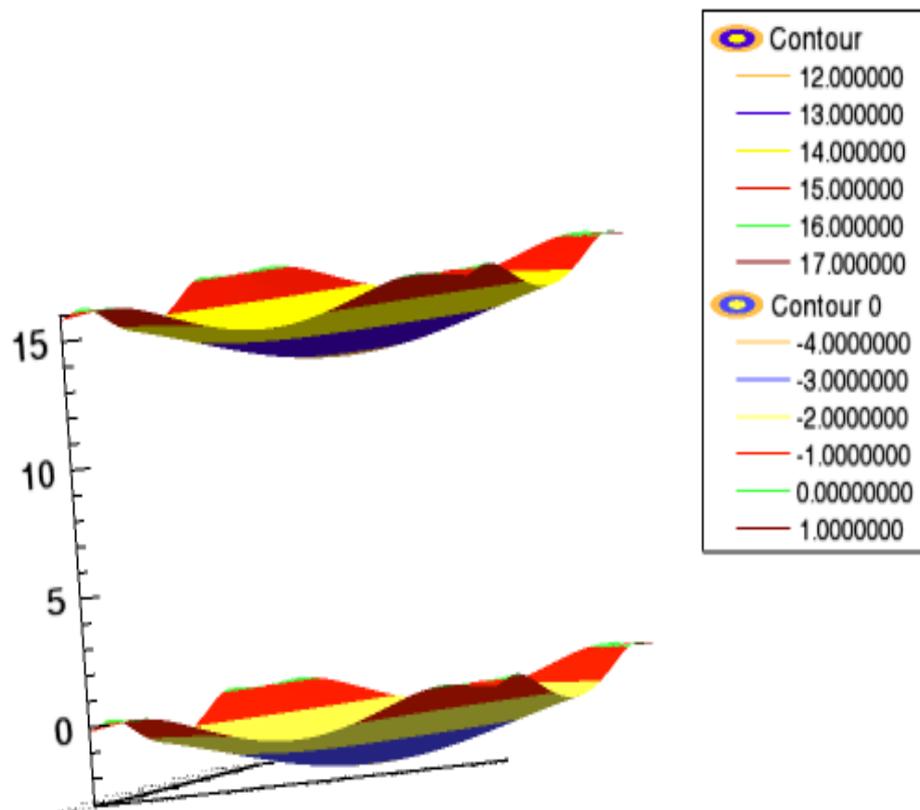


График 8. Прогибы пластин в сечении в середине пластины в зависимости от способа закрепления.

